ZUR THEORIE DER VOLLSTÄNDIG REDUCIBLEN GRUPPEN, DIE ZU EINER GRUPPE LINEARER HOMOGENER SUBSTITUTIONEN GEHÖREN*

(AUS EINEM BRIEFE AN HERRN ALFRED LOEWY)

VON

LUDWIG STICKELBERGER

Die Grundlage des Beweises für Ihren kürzlich veröffentlichten Satz über die grössten vollständig reduciblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören, bildet, wie Sie wissen, der in § 2 Ihrer Arbeit (*Über die vollständig reduciblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören*, Transactions, vol. 6, pp. 504–533), bewiesene Hilfssatz. Zu seinem Beweise berufen Sie sich auf einen Aufsatz von Herrn MASCHKE. Bei der Lectüre Ihrer Arbeit fand ich, dass man an die Stelle Ihres Hilfssatzes folgenden Satz treten lassen kann, den ich verhältnismässig einfach ohne Heranziehung fremder Untersuchungen bewies. Es seien

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad (\mathfrak{B}) \quad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 \\ \mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} \end{matrix}$$

zwei ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen in n Variablen; ihre Bestandteile $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ mögen Gruppen in ν bezüglich π Variablen sein, $\nu < n$, $\pi < n$. Die Substitutionen von $\mathfrak{A}$ mögen lauten:

$$(1) \qquad y_i = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(t)} y'_s \qquad (i=1, 2, \cdots, n);$$

t habe hierbei die Werte $1, 2, 3, \cdots$, und charakterisire die einzelnen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$. Da die Gruppe $\mathfrak{A}$ die Form $(\mathfrak{A})$ hat, werden sich in (1) die ersten ν Variablen in der Form:

$$(2) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{k=\nu} a_{ik}^{(t)} y'_k \qquad (i=1, 2, \cdots, \nu)$$

transformiren, es wird also für $i \leqq \nu$, $k > \nu$ stets $a_{ik}^{(t)} = 0$ sein.

* Presented to the Society at the New Haven summer meeting, September 3, 1906. Received for publication May 8, 1906.

Die Substitutionen von $\mathfrak{B}$ mögen

(3) $$z_i = \sum_{s=1}^{s=n} b_{is}^{(t)} z'_s \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

lauten; der obere Index t, der die Werte $1, 2, 3, \cdots$ annehmen möge, soll dabei auf die Zuordnung der Substitutionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hinweisen. Die ersten π Variablen, welche die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ bestimmen, werden Substitutionen der Form:

(4) $$z_i = \sum_{k=1}^{k=\pi} b_{ik}^{(t)} z'_k \qquad (i=1, 2, \cdots, \pi)$$

erleiden.

Da die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich sind, so wird eine Transformation:

(5) $$z_i = \sum_{s=1}^{s=n} q_{is} y_s \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

von nicht verschwindender Determinante $|q_{ik}|$ existiren, die mit ihrer cogredienten

(5′) $$z'_i = \sum_{s=1}^{s=n} q_{is} y'_s \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$ in die entsprechenden von $\mathfrak{B}$ überführt.

Ich habe mich der gleichen Bezeichnungen wie Sie auf Seite 514 bedient; nur habe ich statt Ihres Buchstabens g_1 den griechischen Buchstaben π verwandt, ferner setze ich *nicht* voraus, dass $\mathfrak{b}_{11}$ eine irreducible Gruppe ist.

Anstelle Ihres Hilfssatzes beweise ich folgenden Satz:

Sind die vorhin charakterisirten Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen und bestehen zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ und $z_1, z_2, \cdots, z_\pi$ genau ρ linear unabhängige lineare homogene Relationen, so haben die Gruppen $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ eine Gruppe von ρ Variablen gemeinsam, d. h. $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ sind zwei Gruppen der Form:

$$\begin{matrix} \bar{\mathfrak{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathfrak{A}}_{21} & \bar{\mathfrak{A}}_{22} \end{matrix} \qquad \textit{und} \qquad \begin{matrix} \bar{\mathfrak{A}}_{11} & 0 \\ \mathfrak{b}'_{21} & \mathfrak{b}'_{22} \end{matrix}$$

ähnlich; hierbei definirt $\bar{\mathfrak{A}}_{11}$ eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in ρ Variablen.

Die ρ linearen homogenen unabhängigen Relationen zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ und $z_1, z_2, \cdots, z_\pi$, die nach (5) lineare homogene Functionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sind, mögen lauten:

(6) $$e_1^{(\lambda)} y_1 + e_2^{(\lambda)} y_2 + \cdots + e_\nu^{(\lambda)} y_\nu + f_1^{(\lambda)} z_1 + f_2^{(\lambda)} z_2 + \cdots + f_\pi^{(\lambda)} z_\pi = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \rho).$$

Setzt man:

$$(7) \qquad Y_\lambda = e_1^{(\lambda)} y_1 + e_2^{(\lambda)} y_2 + \cdots + e_\nu^{(\lambda)} y_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \rho),$$

$$(8) \qquad Z_\lambda = -f_1^{(\lambda)} z_1 - f_2^{(\lambda)} z \cdots - f_\pi^{(\lambda)} z_\pi \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \rho),$$

so gehen die ρ Relationen (6) über in:

$$Y_1 = Z_1,\ Y_2 = Z_2,\ \cdots,\ Y_\rho = Z_\rho,$$

wo die linken Seiten von den y allein, die rechten Seiten von den z allein abhängen. Sowohl die ρ Functionen $Y_1, Y_2, \cdots, Y_\rho$ als auch die ρ Functionen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_\rho$ sind wegen der Bedeutung von ρ linear unabhängig. Zu den ρ Functionen $Y_1, Y_2, \cdots, Y_\rho$ der Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ mögen noch $\nu - \rho$ weitere lineare homogene Functionen $Y_{\rho+1}, Y_{\rho+2}, \cdots, Y_\nu$ der $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$, und zu den ρ Functionen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_\rho$ der $z_1, z_2, \cdots, z_\pi$ noch $\pi - \rho$ weitere lineare homogene Functionen $Z_{\rho+1}, Z_{\rho+2}, \cdots, Z_\pi$ der $z_1, z_2, \cdots, z_\pi$ so zugefügt werden, dass $Y_1, Y_2, \cdots, Y_\nu$ und ebenso $Z_1, Z_2, \cdots, Z_\nu$ unabhängig sind.

Entsprechend den ρ Relationen (6) bestehen für die cogredienten Variablen y' und z' genau die gleichen Relationen, in denen für y und z die Veränderlichen y' und z' stehen. Führt man in entsprechender Weise wie

$$Y_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu) \qquad \text{und} \qquad Z_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \pi)$$

die cogredienten Veränderlichen

$$Y'_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu) \qquad \text{und} \qquad Z'_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \pi)$$

ein, die wie Y_λ und Z_λ aus den y und z in genau gleicher Weise aus den y' und z' gebildet sind, so sind einerseits $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\nu$ und andererseits $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z'_\pi$ linear unabhängig, und zwischen ihnen bestehen nur die ρ Relationen:

$$Y'_1 = Z'_1,\ Y'_2 = Z'_2,\ \cdots,\ Y'_\rho = Z'_\rho.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen geht die Gruppe $\mathfrak{A}_{11}$ in eine ähnliche Gruppe A_{11} in den Veränderlichen Y und Y' über; ihre Substitutionen sind etwa von der Form:

$$(9) \qquad Y_i = \sum_{k=1}^{k=\nu} \bar{a}_{ik}^{(t)} Y'_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu).$$

Die Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ wird einer Gruppe β_{11} in den Variablen Z und Z' ähnlich, deren Substitutionen etwa lauten:

$$(10) \qquad Z_i = \sum_{k=1}^{k=\pi} \bar{b}_{ik}^{(t)} Z'_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, \pi).$$

Für jede Substitution der Gruppe A_{11} ist nach (9) Y_1 eine lineare homogene

Function von $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\nu$. Da für jede Substitution der Gruppe β_{11} die Variable Z_1 nach (10) eine lineare homogene Function von $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z'_\pi$ ist, folgt aus der Relation $Y_1 = Z_1$, dass Y_1 auch eine lineare homogene Function von $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z'_\pi$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass für jede Substitution der Gruppe A_{11} die Variable Y_1 ausschliesslich lineare homogene Function von $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\rho$ ist. Sie werden dies unmittelbar einsehen. Es gilt nämlich allgemein, dass jede lineare homogene Function von $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\nu$, die gleichzeitig lineare homogene Function von $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z'_\pi$ ist, eine lineare homogene Function von $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\rho$ allein ist. Dies folgt einfach daraus, dass jede lineare homogene Function der eben beschriebenen Art eine Relation zwischen $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\nu$ und $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z'_\pi$ zur Folge hat. Diese muss aber, da zwischen $Y'_1, Y'_2, \cdots, Y'_\nu$ und $Z'_1, Z'_2, \cdots, Z_\pi$ nur die ρ Relationen

$$Y'_1 = Z'_1,\ Y'_2 = Z'_2,\ \cdots,\ Y'_\rho = Z'_\rho$$

bestehen, eine Folge dieser ρ Beziehungen sein, also von $Y'_{\rho+1}, Y'_{\rho+2}, Y'_\nu$ und $Z'_{\rho+1}, Z'_{\rho+2}, \cdots, Z'_\pi$ frei sein.

Genau das gleiche Resultat wie für Y_1 gilt offenbar für $Y_2, Y_3, \cdots, Y_\rho$, daher lauten die ersten ρ Transformationen der Gruppe A_{11}:

$$Y_i = \sum_{k=1}^{k=\rho} \bar{a}_{ik}^{(\iota)} Y'_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, \rho).$$

Aus

$$Y_\lambda = Z_\lambda,\ Y'_\lambda = Z'_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \rho)$$

ergiebt sich, dass die ersten ρ Transformationen von β_{11}:

$$Z_i = \sum_{k=1}^{k=\rho} \bar{a}_{ik}^{(\iota)} Z'_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, \rho)$$

lauten. Hiermit ist mein Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{b}_{11}$ im besonderen eine irreducible Gruppe, so muss wegen der Irreducibilität von $\mathfrak{b}_{11}$ für $\rho > 0$ die Gruppe $\bar{\mathfrak{A}}_{11}$ zu $\mathfrak{b}_{11}$ ähnlich sein. In dem Falle, dass $\mathfrak{b}_{11}$ eine irreducible Gruppe ist, bezeichne ich die Anzahl ihrer Variablen statt mit dem Buchstaben π mit dem nämlichen Buchstaben g_1 wie Sie. Da dann $\mathfrak{b}_{11}$ ein Bestandteil von $\mathfrak{A}_{11}$ ist, müssen die Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ von $\mathfrak{b}_{11}$ lineare homogene Functionen der Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ von $\mathfrak{A}_{11}$ sein, d. h. es werden Relationen:

$$z_i = \sum_{s=1}^{s=\nu} r_{is} y_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1)$$

bestehen; hierbei sind die $\nu \cdot g_1$ Grössen r_{is} Constante. Aus (5) ergiebt sich dann:

$$\text{(11)} \qquad \sum_{s=1}^{s=n} q_{is} y_s = \sum_{s=1}^{s=\nu} r_{is} y_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1).$$

Da $y_1, y_2, \cdots, y_n$ linear unabhängige Variablen sind, müssen in den g_1 Relationen (11) die Grössen $r_{ik} = q_{ik}$ für $i \leqq g_1$, $k = 1, 2, \cdots, \nu$ und $q_{ik} = 0$ für $i \leqq g_1$, $k > \nu$ werden. Ist $\mathfrak{b}_{11}$ also eine irreducible Gruppe, so lauten für $\rho > 0$ die ersten g_1 Gleichungen der überführenden Transformation (5):

$$z_i = \sum_{k=1}^{k=\nu} q_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1).$$

Dies ist der von Ihnen auf Seite 515 ausgesprochene Satz.

Das angewandte Beweisverfahren führt keine Irrationalitäten ein; daher gilt es auch für den Fall, dass die Coefficienten sämtlicher Substitutionen der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einem Zahlkörper Ω angehören und man sich, wie Sie es im § 6 Ihrer Arbeit tun, ausschliesslich im Körper Ω bewegt.